**V353: Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises**

Protokoll zum Versuch des Anfängerpraktikums für Medizinphysiker  
Technische Universität Dortmund

**Michelle Wendler & Phuong Quynh Ngo**Gruppe 4

Versuchsdatum: 17.01.2020  
Protokoll verfasst am: 21.01.2020

**michelle.wendler@tu-dortmund.de  
phuong-quynh.ngo@tu-dortmund.de**

**1 Ziel des Versuches**

Bei diesem Versuch soll das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises untersucht werden. Hierzu werden dessen Zeitkonstante und die Phase zwischen der Generator- und der Kondensatorspannung bestimmt werden. Zudem wird die Frequenzabhängigkeit der Amplitude der Kondensatorspannung überprüft.

**2 Theorie**

Wird ein System aus seinem Anfangszustand entfernt und reagiert auf diese Änderung verzögert, so wird dies als Relaxation bezeichnet. Für schwingende Systeme gilt dieses Phänomen jedoch nicht. Ein Beispiel für ein System, bei dem Relaxationserscheinungen auftreten, ist der RC-Kreis. Die Auf- und Entladung eines Kondensators über einen Widerstand sind hierbei die Relaxationsvorgänge. In diesem Versuch wird die Aufladung des Kondensators untersucht.

Die zeitliche Änderung einer physikalischen Größe nach einer Auslenkung ist proportional zur Abweichung dieser Größevom asymptotischen Grenzzustand

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 1 ) |

Nach Integration dieser Gleichung vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt t und der Anwendung der e-Funktion auf beiden Seiten gilt

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 2 ) |

Hierbei muss c<0 sein, da sonst unbeschränkt wäre.

**2.1 Entladevorgang eines Kondensators**

Auf den Platten eines aufgeladenen Kondensators mit der Kapazität befindet sich die Ladung . Zwischen den Platten liegt eine Spannung , welche durch die entgegengesetzten Ladungen der Platten hervorgerufen wird. Diese wird durch

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 3 ) |

beschrieben.

Durch die Kondensatorspannung fließt während der Entladung des Kondensators ein Strom durch den Widerstand welcher die Potentialdifferenz auf den Platten ausgleicht. Dieser Strom kann durch das Ohm’sche Gesetz

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 4 ) |

beschrieben werden.

Durch das Abfließen der Ladung von der einen Kondensatorplatte zur anderen, ändert sich diese im Laufe der Zeit

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 5 ) |

Mit Hilfe der Formeln ( 2 ) und ( 4 ) ergibt sich aus Formel ( 5 ) die Differentialgleichung

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 6 ) |

Diese Differentialgleichung ähnelt der Relaxationsgleichung ( 1 ). Auch hier wird über die Zeit integriert und die e-Funktion genutzt, um eine Lösung zu bekommen. Beachtet man zusätzlich die zeitlichen Randbedingungen und , so ergibt sich die Lösung

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 7 ) |

Dabei bezeichnet man den Faktor als Zeitkonstante des RC-Kreises, welche ein Maß für die Geschwindigkeit, mit der sich der Zustand des Systems ändert, ist. In einem Zeitintervall ändert sich die Ladung auf dem Kondensator um den Faktor .

**2.2 Aufladevorgang des Kondensators**

Die Differentialgleichung ( 6 ) gilt auch für den Aufladevorgang eines Kondensators, jedoch ist dieser nun an eine Spannungsquelle mit der Spannung angeschlossen. Der Aufladevorgang fängt mit einem Ladungsfreien Kondensator an und endet mit einer asymptotischen Ladung . Dementsprechend gelten nun die zeitlichen Randbedingungen und . Daraus ergibt sich die Lösung

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

der Differentialgleichung ( 6 ).

**2.3 Relaxationsverhalten bei angelegter Wechselspannung**

Wird eine externe Sinus-Wechselspannung angelegt, kann diese durch

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 8 ) |

beschrieben werden.

Zwischen der eingehenden Spannung und der Spannung, die über den Kondensator abfällt, bildet sich eine Phasenverschiebung , welche durch die zeitlich verzögerte Kondensatorspannung hervorgerufen wird. Somit lässt sich die vom Kondensator ausgehende Spannung über

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 9 ) |

beschreiben. Hierbei beschreibt die Frequenzabhängige Amplitude der Kondensatorspannung. Auch die Phase ist Frequenzabhängig. Es lässt sich beobachten, dass für hinreichend kleine Kreisfrequenzen die Phase zwischen der Eingangs- und Kondensatorspannung verschwindet gering ist, sodass sich und zu jedem Zeitpunkt gleichen.

Mit Hilfe der Differentialgleichung ( 6 ), den Kirch’hoffschen Regeln und der Beziehung

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 10 ) |

ergibt sich für die Phase zwischen den beiden Spannungen die Formel

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 11 ) |

und für die Amplitude der Kondensatorspannung die Formel

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 12 ) |

Zwischen der Amplitude und der Phase herrscht die Beziehung

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 13 ) |

Erkennbar wird, dass für geringe Frequenzen die Phase verschwindet und die Kondensatoramplitude sich der Amplitude der Eingangsspannung nähert. Wiederum wird die Phase zwischen den Spannungen mit zunehmender Frequenz größer und geht gegen Null. Aufgrund dessen können RC-Kreise als Tiefpässe genutzt werden.

**2.4 Der RC-Kreis als Integrator**

Unter der Voraussetzung, dass gilt, kann ein RC-Kreis als Integrator verwendet werden.

Die Gleichung

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 14 ) |

welche aus der 1. Kirchhoff’schen Regel hergeleitet wird, kann durch ( 10 ) umgeschrieben werden zu

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 15 ) |

Mit der genannten Voraussetzung folgt die Näherung

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( 16 ) |

**3 Versuchsaufbau- und Durchführung**

**3.1 Entladevorgang des Kondensators**

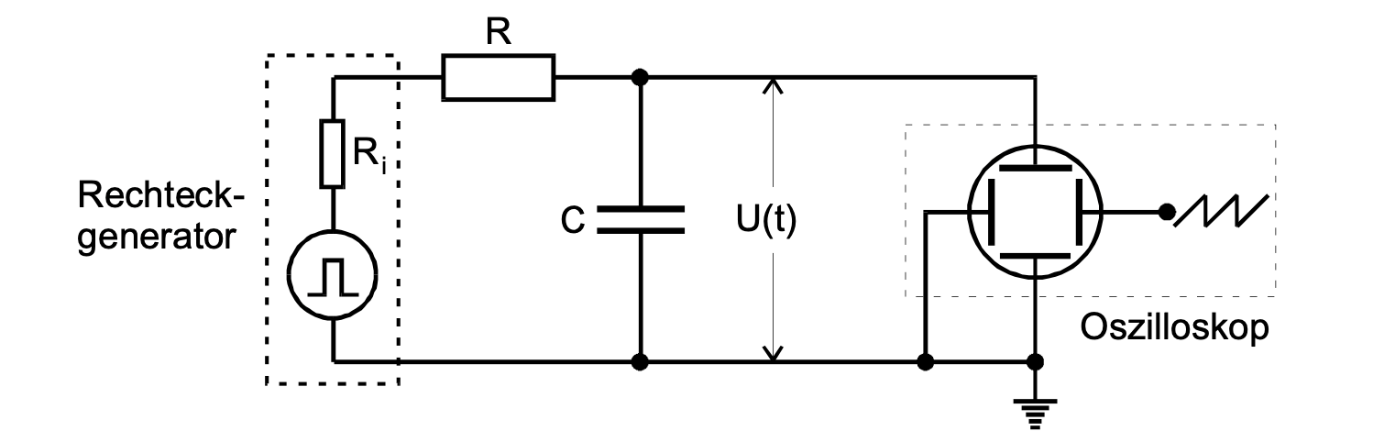


Abbildung 1: Aufbau der Schaltung zur Bestimmung der Zeitkonstanten [1]

In Abbildung 1 ist der Aufbau der benötigten Schaltung zu sehen. Ein Ohm’scher Widerstand und ein Kondensator sind an einem Spannungsgenerator und an einem Oszilloskop angeschlossen. An dem Spannungsgenerator wird eine Reckteckspannung eingestellt. Auf dem Oszilloskop lassen sich die Auf- und Entladevorgänge des Kondensators über die Kondensatorspannung beobachten. Es werden die Kondensatorspannungen zu 10 Zeiten des Entladevorgangs entnommen.

**3.2 Frequenzabhängigkeit des RC-Kreises**

Um die Frequenzabhängigkeit der Amplitude der Kondensatorspannung und der Phasenverschiebung zwischen Kondensator- und Eingangsspannung zu beobachten, wird derselbe Aufbau wie in Abbildung 1 genutzt, jedoch wird an dem Spannungsgenerator eine Sinusspannung eingestellt. Es werden für Frequenzen zwischen 50-5000 Hz die Amplituden der Kondensatorspannung und die Abstände und , die in Abbildung 2, abgelesen und notiert.

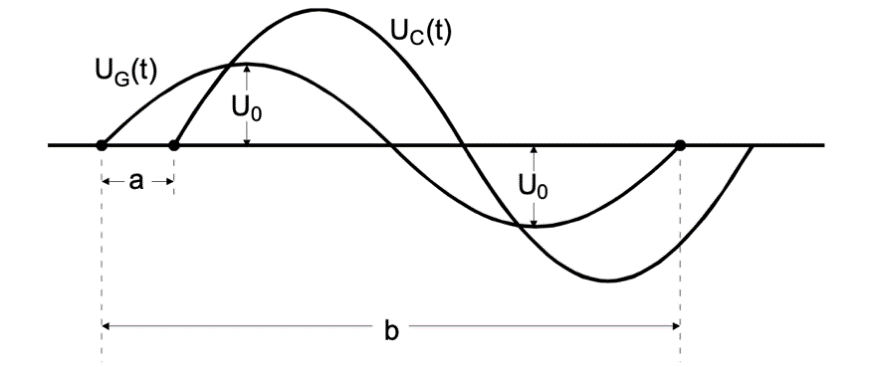


Abbildung 2: Ermittlung der Phasenverschiebung [1]

**3.3 RC-Kreis als Integrator**

Um die Funktionalität eines RC-Kreises als Integrator zu überprüfen, wird derselbe Aufbau wie zuvor genutzt. Die Frequenz des Spannungsgenerators wird auf 15000 Hz gestellt und der Generator wird zunächst auf eine Rechteckspannung, dann auf eine Sinus- und am Schluss auf eine Dreiecksspannung gestellt.

**4 Auswertung**

Alle benötigten Ausgleichsrechnungen werden mit Python durchgeführt und geplottet.

**4.1 Ermittlung der Zeitkonstante durch Beobachtung des Entladevorganges eines**

**Kondensators (Aufgabe 6 a)**

In diesem Teil wird die Zeitkonstante mit Hilfe einer linearen Ausgleichsrechnung bei Entladevorgang des Kondensators bestimmt. Die Messung wird bei eine Generatorspannung durchgeführt. Die aus der Messung erhaltenen Werte sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Tabelle 1: Messdaten zum Entladevorgang des Kondensators

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **t [ms]** | **UC(t) [V]** | **ln(UC(t)/U0)** |
| 0,0 | 2,80 | 0 |
| 0,4 | 2,00 | -0,3365 |
| 1,0 | 1,00 | -1,0296 |
| 1,4 | 0,07 | -1,3863 |
| 2,0 | 0,35 | -2,0794 |
| 2,4 | 0,25 | -2,4159 |
| 3,0 | 0,15 | -2,9267 |
| 3,4 | 0,10 | -3,3322 |
| 4,0 | 0,05 | -4,0254 |
| 5,0 | 0,00 |  |

In Abbildung 3 werden alle natürlichen Logarithmen der Messwerte und die dazu gehörige Ausgleichsgerade dargestellt.

A close up of a map

Description automatically generated

Abbildung 3: Ausgleichungsgerade zur Bestimmung der Zeitkonstante mit Hilfe der Entladekurve

Aus der Gleichung ( 7 ) wird die Form der Ausgleichungsgerade durch :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (17) |

mit

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

bestimmt.

Der Parameter ergibt sich zu

Der zuvor gerechneten -Wert gilt für gesamte Widerstand , der sich aus Innenwiderstand und Widerstand des RC-Kreis zusammenergibt.

Damit ergibt sich die Zeitkonstante die Werte von

**4.2 Ermittlung der Zeitkonstante über die Amplitude der Kondensatorspannung**

**(Aufgabe 6 b)**

In diesem Teil wird die Zeitkonstante durch die Relativamplitude des Kondensators ermittelt. Für die Kreisfrequenz gilt , wobei die Frequenz der Generatorspannung ist. Die Messung wird bei der Änderung der Generatorfrequenz durchgeführt. Die aus der Messung erhaltenen Werte sind in Tabelle 2 aufgeführt und die Ausgleichskurve wird in Abbildung 4 graphisch dargestellt.

Tabelle 2: Messdaten zur Relativamplitude

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 50 | 2,60 | 0,9286 | 2000 | 0,256 | 0,0914 |
| 60 | 2,60 | 0,9286 | 3000 | 0,170 | 0,0607 |
| 70 | 2,60 | 0,9286 | 4000 | 0,138 | 0,0493 |
| 80 | 2,50 | 0,8929 | 5000 | 0,110 | 0,0393 |
| 90 | 2,48 | 0,8857 | 6000 | 0,090 | 0,0321 |
| 100 | 2,42 | 0,8643 | 7000 | 0,078 | 0,0279 |
| 200 | 1,92 | 0,6857 | 8000 | 0,069 | 0,0246 |
| 300 | 1,50 | 0,5357 | 9000 | 0,059 | 0,0211 |
| 400 | 1,20 | 0,4286 | 10000 | 0,055 | 0,0196 |
| 500 | 1,00 | 0,3571 | 11000 | 0,050 | 0,0179 |
| 600 | 0,85 | 0,3036 | 12000 | 0,046 | 0,0164 |
| 700 | 0,72 | 0,2571 | 13000 | 0,042 | 0,0150 |
| 800 | 0,65 | 0,2321 | 14000 | 0,0396 | 0,0141 |
| 900 | 0,58 | 0,2071 | 15000 | 0,032 | 0,0114 |
| 1000 | 0,50 | 0,1786 |  |  |  |

A close up of a map

Description automatically generated

Abbildung 4: Ausgleichskurve zur Bestimmung der Zeitkonstante über die Relativamplitude der Kondensatorspannung

Die Ausgleichskurve hat die Form

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (18) |

mit

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Der Parameter ergibt sich zu:

Unter dem Betrachtung von Innenwiderstand wird die Zeitkonstante des RC-Kreises zu

bestimmt.

**4.3 Ermittlung der Zeitkonstanten über die Phasenverschiebung (Aufgabe 6 c)**

Die Zeitkonstante des RC-Kreises wird bei diesem Teil über die Phasenverschiebung ermittelt. In Tabelle 3 sind die gemessenen Werte aufgeführt und die Ausgleichskurve ist in Abbildung 5 dargestellt.

Die Ausgleichskurve besitzt die Form

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (19) |

mit

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | und . |  |

Der Parameter ergibt sich zu

Unter dem Betrachtung von Innenwiderstand lautet die Zeitkonstante des RC-Kreises

Tabelle 3: Messdaten zur Phasenverschiebung

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***f* [Hz]** | ***a* [ms]** | ***b* [ms]** | **[rad]** | ***f* [Hz]** | ***a* [ms]** | ***b* [ms]** | **[rad]** |
| 50 | 0,600 | 12,50 | 0,3016 | 2000 | 0,079 | 0,332 | 1,4951 |
| 60 | 0,600 | 10,30 | 0,3660 | 3000 | 0,046 | 0,215 | 1,3443 |
| 70 | 0,600 | 9,20 | 0,4098 | 4000 | 0,040 | 0,160 | 1,5708 |
| 80 | 0,600 | 8,10 | 0,4654 | 5000 | 0,032 | 0,128 | 1,5708 |
| 90 | 0,600 | 7,00 | 0,5386 | 6000 | 0,024 | 0,106 | 1,4226 |
| 100 | 0,500 | 6,24 | 0,5035 | 7000 | 0,022 | 0,090 | 1,5359 |
| 200 | 0,400 | 3,20 | 0,7854 | 8000 | 0,020 | 0,080 | 1,5708 |
| 300 | 0,340 | 2,18 | 0,9799 | 9000 | 0,017 | 0,070 | 1,5259 |
| 400 | 0,280 | 1,60 | 1,0996 | 10000 | 0,015 | 0,062 | 1,5201 |
| 500 | 0,240 | 1,30 | 1,1600 | 11000 | 0,015 | 0,058 | 1,6250 |
| 600 | 0,220 | 1,05 | 1,3165 | 12000 | 0,013 | 0,052 | 1,5708 |
| 700 | 0,200 | 0,80 | 1,5708 | 13000 | 0,012 | 0,0488 | 1,5450 |
| 800 | 0,190 | 0,79 | 1,5111 | 14000 | 0,012 | 0,046 | 1,6391 |
| 900 | 0,160 | 0,72 | 1,3963 | 15000 | 0,010 | 0,0432 | 1,4544 |
| 1000 | 0,152 | 0,64 | 1,4923 |  |  |  |  |

A close up of a map

Description automatically generatedAbbildung 5: Ausgleichskurve zur Bestimmung der Zeitkonstante über die Phasenverschiebung

**4.4 Berechnung der Phasenverschiebung für den Polarplot (Aufgabe 6 d)**

Die Relativamplituden werden nach der Gleichung ( 12 ) mit der zuvor ermittelten Wert von aus 4.3 bestimmt. Im Polarkoordinatensystem, welches in Abbildung 6 dargestellt ist, lässt sich die Abhängigkeit der Relativamplitude von der Phase graphisch stellen.

A close up of a map

Description automatically generated

Abbildung 6: Relativamplitude aufgetragen gegen Phase

**4.5 RC-Kreis als Integrator**

Ein Bild, das drinnen, Wand, Mikrowelle enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Abbildung 7: RC-Kreis als Integrator: Rechteckspannung

Ein Bild, das Mikrowelle, Backofen, drinnen, Monitor enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Abbildung 8: RC-Kreis als Integrator: Sinusspannung

Ein Bild, das Backofen, Mikrowelle, drinnen, Monitor enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Abbildung 9: RC-Kreis als Integrator: Dreieckspannung

Es lässt sich bei jeder der drei Spannungen sehen, dass ein RC-Kreis als Integrator fungieren kann. Bei einer angelegten Rechteckspannung lässt sich ein typischer exponentieller An- und Abstieg erkennen. Auch, wenn dies hier nicht sehr gut zu erkennen ist, da durch die hohe Frequenz der Eingangspannung die Verläufe eher linear scheinen.

Bei der angelegten Sinusspannung lässt sich eine negative Cosinusspannung des Kondensators beobachten. Wird die Funktion integriert, liefert diese die Funktion

Bei der Dreiecksspannung lässt sich eine parabelförmige Kondensatorspannung erkennen. Eine Dreiecksspannung wird durch eine lineare Funktion beschrieben. Diese integriert liefert die Funktion einer Parabel.

**5 Diskussion**

Über 3 Methoden wird die Zeitkonstante des RC-Kreises bestimmt. Die bestimmte Werte ergeben sich für:

( über Entladevorgang)

( über Relativamplitude)

( über Phasenverschiebung).

Die RC-Werte liegen nah bei einander.

Der theoretische RC-Wert ist:

Die Abweichung der 3 RC-Werte mit dem theoretischen Wert werden nach der Formel

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (20) |

berechnet und ergeben sich für

( über Entladevorgang): 12,54

( über Relativamplitude): 26,08

( über Phasenverschiebung):.

Die Abweichung liegt daran, dass das Ablesen der Messwerte aus dem Bildschirm auf dem Oszilloskop eine sehr ungenaue Methode ist und es Widerstand auf den Kabel gibt. Um die Abweichung zu minimieren empfiehlt es sich die Messung über das größer Intervall von Generatorfrequenz zu lassen, das Ablesen der Messwerte öfter zu führen.

Bei der Beobachtung des Entladevorganges des RC-Kreises fällt die Spannung des Kondenstors exponentiell mit der Zeit wie erwartet ab. Bei der Sinnunsspannungsgenerator enspricht die Abhängigkeit von Amplitude der Kondensatorspannung mit der Generatorfrequenz die Erwartung: für geht gegen und für verschwindet . Die Phasenverschiebung ändert sich auch wie erwartet: für geht und für geht .

**6 Literatur**

[1] Versuchsanleitung zu dem Versuch V353: Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

https://moodle.tu-dortmund.de/pluginfile.php/982985/mod\_folder/content/0/V353%20Der%20RC-Kreis.pdf?forcedownload=1

Stand: 17.01.2020